Démonstrations de cours exigibles au bac S en mathématiques

Enseignement obligatoire

Suites croissantes non majorées

Théorème

□ Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Démonstration

■ Soit une suite (U_n) non majorée et croissante, et A un réel arbitraire.

Comme la suite est non majorée, il existe au moins un terme U_p de la suite tel que $U_p > A$.

Or, la suite étant croissante, si l'on prend $n > p$, on aura $U_n > U_p$, donc $U_n > A$.

On a donc, à partir du terme U_p , tous les termes de la suite qui sont supérieurs à A.

La suite (U_n) étant supérieure à tout réel A pour tout rang $n > p$,

on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Méthode

► On montre qu'il existe un rang p tel que $U_p > A$.

► On en déduit que $U_n > U_p > A$ pour tout $n > p$, c'est-à-dire qu'à partir du terme U_p , tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

► Cette propriété de (U_n) d'être supérieure à tout réel A à partir d'un rang n suffisamment grand est la définition même de $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, et c'est ce qu'il faut démontrer.

Théorèmes des gendarmes

Théorèmes

□ Si pour tout x appartenant à un intervalle $[\alpha \,;\, +\infty[$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

□ De même, si pour tout x appartenant à un intervalle $]-\infty \,;\, \beta]$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = L$,

alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L$.

Démonstrations

■ Soit J un intervalle ouvert quelconque contenant le réel L.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, il existe un réel A tel que $x > A$ entraîne $f(x) \in J$.

De même, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$, il existe un réel B tel que $x > B$ entraîne $h(x) \in J$.

Si on choisit un réel C tel que $C > A$ et $C > B$, alors si $x > C$, on a $f(x) \in J$ et $h(x) \in J$.

Or $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, donc on a aussi $g(x) \in J$, ce qui démontre $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

■ La démonstration est analogue pour la seconde partie du théorème.

Méthode

► Il faut retenir qu'on veut prouver que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On pose donc un intervalle ouvert J quelconque contenant L.

► Connaissant la limite commune L de f et de h en $+\infty$, et sachant que $L \in J$, on montre qu'il existe un réel A tel que $x > A$ entraîne $f(x) \in J$ et qu'il existe un réel B tel que $x > B$

entraîne $h(x) \in J$.

► En posant $x > C$ avec $C > A$ et $C > B$, on montre que $g(x) \in J$, et c'est ce qu'il faut démontrer.

Théorème de la bijection

Théorème

□ Si la fonction *f* est *continue et strictement monotone* sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$,

alors pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équationa une *solution unique*

sur $[a\ ;\ b]$.

On dit que *f* est une *bijection* de $[a\ ;\ b]$ sur $[f(a)\ ;\ f(b)]$ ou $[f(b)\ ;\ f(a)]$ selon que *f* est croissante ou décroissante.

Démonstration

■ Soit *f* une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et un réel *k*

tel que $f(a) < k < f(b)$.

La fonction *g* telle que $g(x) = f(x) - k$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle considéré, d'après les théorèmes vus en Première.

On a $g(a) = f(a) - k < k - k \Rightarrow g(a) < 0$

et $g(b) = f(b) - k > k - k \Rightarrow g(b) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver un réel c de cet intervalle

tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = k$.

L'équation $f(x) = k$ admet donc au moins une solution sur $[a\ ;\ b]$.

Cette solution *est unique* : en effet, si on avait deux réels distincts *c* et *c'* tels que $c < c'$

et $f(c) = f(c') = k$, il y aurait une contradiction avec le fait que *f* est strictement croissante

sur $[a\ ;\ b]$. La solution est donc unique.

■ Pour une fonction strictement décroissante, le raisonnement est le même en remplaçant $f(a) < k < f(b)$ par $f(b) < k < f(a)$.

Méthode

► On pose $f(a) < k < f(b)$, puis $g(x) = f(x) - k$.

► On montre que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.

► On montre en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et la relation entre *f* et *g* qu'il existe un réel *c* tel que $f(c) = k$.

► En raisonnant par l'absurde, on montre que cette solution est unique puisque, dans le cas contraire, on aboutirait à une contradiction (une fonction strictement croissante ne peut pas avoir une même image à partir de deux antécédants différents *c* et *c'*).

► On note que la démonstration est analogue avec une fonction strictement décroissante.

Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

□ Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle *I* et *v* une fonction dérivable en $u(x)$ pour tout *x* appartenant à *I*, alors la *fonction composée* $v \circ u$ est dérivable sur *I*, et pour tout *x* de *I*, on a $(v \circ u)'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x))$.

Démonstration

■ Soit *a* appartenant à *I* ; Par hypothèse *u* est dérivable en *a*, donc :

$u(a + h) = u(a) + hu'(a) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On peut alors écrire $v(u(a + h)) = v(u(a) + k)$, avec $k = hu'(a) + h\varepsilon(h)$.

Or, lorsque *h* tend vers *0*, $hu'(a) + h\varepsilon(h)$ tend vers *0*, et puisque *v* est dérivable en $u(a)$,

on peut écrire :

$$v(u(a) + k) = v(u(a)) + k\,v'(u(a)) + k\,\phi(k) \text{ , avec } \lim_{k \to 0} \phi(k) = 0 \text{ ,}$$

$$\begin{aligned} &v(u(a) + k) = v(u(a)) + k\,v'(u(a)) + k\,\phi(k) + [\mathit{un\,terme\,tendant\,vers}\,0\;\mathit{quand}\;h\,\mathit{tend\,vers}\,0] \\ \Rightarrow &v(u(a) + h) = v(u(a)) + h\,u'(u(a))\;v'(u(a)) + [\mathit{un\,terme\,tendant\,vers}\,0\;\mathit{quand}\;h\,\mathit{tend\,vers}\,0] \end{aligned}$$

Donc on a : $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(u(a+h)) - v(u(a))}{h} = u'(a)\;v'(u(a))$.

Unicité de la fonction f telle que f' = f et f(0) = 1

Théorème

□ Il existe une, et une seule fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

■ L'existence d'une telle fonction est admise, nous devons juste en démontrer l'unicité.

Soit *g* une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

La fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $\dfrac{g}{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2} = 0$. La fonction $\dfrac{g}{f}$ est donc constante.

D'où :

$$\begin{aligned} &g = C\,f \\ \Rightarrow\ &g(0) = C \times f(0) \\ \Rightarrow\ &1 = C \times 1 \end{aligned}$$

On a ainsi $C = 1$ et $g = f$.

La fonction *f* est donc unique.

Limites de la fonction exponentielle et du logarithme népérien

Théorèmes

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Démonstrations

■ Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

f et f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.

Or, on sait que pour tout $x > 0$, $e^x > 1$ donc $f''(x) > 0$ et f' est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

De plus $f'(0) = 1$.

Par suite, sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.

Or, $f(0) = 1$.

On en déduit que $f(x) > f(0)$, soit $f(x) > 1 > 0$. Autrement dit : $e^x > \dfrac{x^2}{2}$.

D'où, comme $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

■ On pose $X = -x$. Alors $x\, e^x$ s'écrit $-\dfrac{X}{e^X}$.

Or, $\lim\limits_{X \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{X}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{-1}{\left(\dfrac{e^X}{X}\right)} = 0$.

■ On pose $t = \ln x$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} t = +\infty$.

$\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{t}{e^t}$ est l'inverse de $\dfrac{e^t}{t}$. Or, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$, donc la limite de l'inverse $\dfrac{\ln x}{x}$ est *0*.

Primitives d'une fonction

Théorème

□ Soit f une fonction continue sur I contenant a.

Quel que soit x de I, la fonction $F : x \to \int_a^x f(t)\ dt$ est dérivable sur I et sa dérivée est f.

Autrement dit, une primitive de f sur I est F.

Démonstration

■ On considère d'abord la fonction f strictement croissante et positive sur $[a\ ;\ b]$.

Soient α et $\alpha + h$ deux réels de cet intervalle avec $h > 0$. On a :

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(t)\ dt$$

et, $F(\alpha + h) = \int_a^{\alpha + h} f(t)\ dt$

On s'intéresse maintenant à l'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses

sur $[\alpha\ ;\ \alpha + h]$.

On a $h \times f(\alpha) \leq F(\alpha + h) - F(\alpha) \leq h \times f(\alpha + h)$, puisque f est croissante sur I.

Selon que $h > 0$ ou $h < 0$, on a :

$$f(\alpha) \leq \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} \leq f(\alpha + h) \quad \text{ou} \quad f(\alpha + h) \leq \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} \leq f(\alpha) \ .$$

Or, f est continue sur I, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(\alpha + h) = f(\alpha)$, et d'après le théorème des gendarmes,

il en résulte $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$.

Donc F est dérivable en α et $F'(\alpha) = f(\alpha)$.

Méthode

► Le but de la démonstration est de montrer que F est dérivable en vérifiant
que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h}$ est égal à un réel et que ce réel est $f(\alpha)$.
Ici on raisonne à partir de la relation entre F et l'aire du domaine compris entre la courbe de f

et l'axe des abscisses sur $[\alpha\ ;\ \alpha + h]$.

Equation différentielle y' = ay + b

Théorème

□ Les solutions de l'équation *(E)* : $y' = ay + b$ sont les fonction de la forme $f - \frac{b}{a}$ où *f* est une solution de l'équation $y' = ay$.

Toutes les solutions de *(E)* s'obtiennent en ajoutant à une solution quelconque de $y' = ay$,

la constante de solution particulière de *(E)*.

Démonstration

■ Une fonction *g* de la forme $f - \frac{b}{a}$ avec *f* une solution de l'équation $y' = ay$ est une solution de *(E)* puisque :

$$g'(x) = \left(f(x) - \frac{b}{a}\right)' = f'(x) = af(x) = a\left(g(x) + \frac{b}{a}\right) = ag(x) + b \quad .$$

Réciproquement, soit *g* une solution de *(E)*,

alors $f'(x) = \left(g(x) + \frac{b}{a}\right)' = ag(x) + b = af(x) - b + b = af(x)$.

Méthode

► Il suffit de vérifier par le calcul que $g'(x) = ag(x) + b$ et que $f'(x) = af(x)$.

Forme trigonométrique

Théorème

□ Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \cos x + i\sin x$.

On a, pour tout réels *x* et *y*, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Démonstration

■ On sait d'après le programme de Première les propriétés suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

On a donc : $f(x+y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$
$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i\sin x\cos y + i\sin y\cos x$

et : $f(x)f(y) = (\cos x + i\sin x) \times (\cos y + i\sin y)$
$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i\sin x\cos y + i\sin y\cos x$
$= f(x+y)$

Méthode

► Il faut se rappeler des formules de trigonométrie de Première, et alors la démonstration se fait tout simplement par le calcul.

Combinaisons

Théorèmes

□ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

□ $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Démonstrations

■ Si une partie A de F possède p éléments, la partie complémentaire de A, c'est-à-dire la partie contenant les éléments de F non élélements de A, en possède $n-p$: il y a donc autant de parties à p éléments que de parties à $n-p$, d'où la formule :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} .$$

■ F est un ensemble de n éléments, a est l'un d'eux ; F contient donc $n-1$ éléments autres que a.

Soit A une partie de F ayant p éléments. Deux cas peuvent se produire :

Soit $a \in A$, soit $a \notin A$.

Si $a \in A$, les $p-1$ autres éléments de A sont choisis parmi $n-1$ éléments de F.

Si $a \notin A$, les p éléments de A sont choisis parmi $n-1$ éléments de F, d'où la formule :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} .$$

Méthode

► La première formule est logique. Chaque possibilité d'élément composant une partie est une possibilité d'élément ne composant pas la partie contraire.

► Ici aussi, c'est de la logique. On peut aussi démontrer la relation par le calcul, même si ce n'est pas forcément la méthode recommandée.

Enseignement de spécialité

Infinité des nombres premiers

Théorème

□ Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration

■ On suppose qu'il existe une quantité finie de nombres premiers.

Soit p le plus grand d'entre eux et soit N le produit de tous ces nombres premiers :

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times p$.

Soit à présent l'entier $N' = N + 1$. Le reste de la division euclidienne de N'

par $2,\ 3,\ 5,\ ...$ ou p est *1*, donc N' n'est divisible par aucun des entiers $2,\ 3,\ 5,\ ...,\ p$.

■ Si N' est premier, il est supérieur à p, ce qui est absurde.

■ Si N' n'est pas premier, il a au moins un diviseur qui est supérieur à p, ce qui est absurde.

La seule possibilité est donc qu'il y ait une infinité de nombres premiers.

Similitude ayant deux points fixes distincts

Théorème

□ Une similitude ayant *deux points fixes* distincts est l'identité ou une symétrie axiale.

Démonstration

■ Soit s une similitude ayant deux points fixes distincts M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 $(z_1 \neq z_2)$.

■ Si s est une similitude directe, alors son écriture complexe est de la forme :

$z \to az + b$.

M_1 et M_2 sont des points fixes, donc :

$z_1 = az_1 + b$ et $z_2 = az_2 + b$.

Par différence, on a $z_2 - z_1 = a(z_2 - z_1)$. Comme $z_1 \neq z_2$, on a $a = 1$.

Par suite $z_1 = z_1 + b$ et ainsi $b = 0$. L'écriture complexe de s est donc : $z \to z$.

s est ici l'identité.

■ Si s est une similitude indirecte, alors c'est la composée de la symétrie σ d'axe (M_1M_2) et d'une similitude directe s' : $s = s' \circ \sigma$, d'où $s \circ \sigma = (s' \circ \sigma) \circ \sigma = s' \circ (\sigma \circ \sigma) = s'$.

On a alors :

$$s'(M_1) = s \circ \sigma(M_1) = s(M_1) = M_1$$
$$s'(M_2) = s \circ \sigma(M_2) = s(M_2) = M_2$$

Par suite, s' est une similitude directe et a deux points fixes distincts.

D'après ce qui a été montré précédemment, s' est l'identité du plan. Ainsi $s = \sigma$.

s est donc ici une symétrie axiale.

Similitude transformant deux points en deux autres points

Théorème

□ Etant donnés quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une *unique similitude directe* transformant A en A' et B en B'.

Démonstration

■ Si la similitude s existe, on la détermine par son écriture complexe $z' = az + b$.

On note α , α' , β et β' les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

On a donc $\alpha \neq \alpha'$ et $\beta \neq \beta'$. Il s'agit donc de démontrer l'existence d'un unique couple $(a\ ;\ b)$ tel que $A' = s(A)$ et $B' = s(B)$.

$(a\ ;\ b)$ est solution du système : $\begin{cases} \alpha' = a\alpha + b \\ \beta' = a\beta + b \end{cases}$

Ce système est équivalent au système $\begin{cases} (\alpha - \beta)a = \alpha' - \beta' \\ \alpha' = a\alpha + b \end{cases}$

Comme $\alpha - \beta \neq 0$, la première équation admet une unique solution pour a.

En reportant dans la deuxième équation on obtient une unique valeur pour b.

On a : $a = \dfrac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta}$ et $b = \dfrac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \beta}$.

Donc $|a| = \left|\dfrac{\alpha' - \beta'}{\alpha - \beta}\right| = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $arg\, a = \left(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{B'A'}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}\right) + \lambda \times 2\pi \ \ (\lambda \in \mathbb{Z})$.